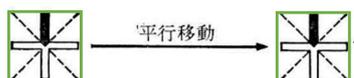


# 流体工学I

7回目

ベルヌーイの定理の応用、  
渦運動と循環の概念

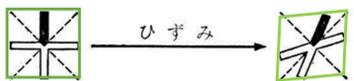
渦運動



渦なし運動 (ポテンシャル流れ)  
平行移動  
ひずみ  
平行移動+ひずみ

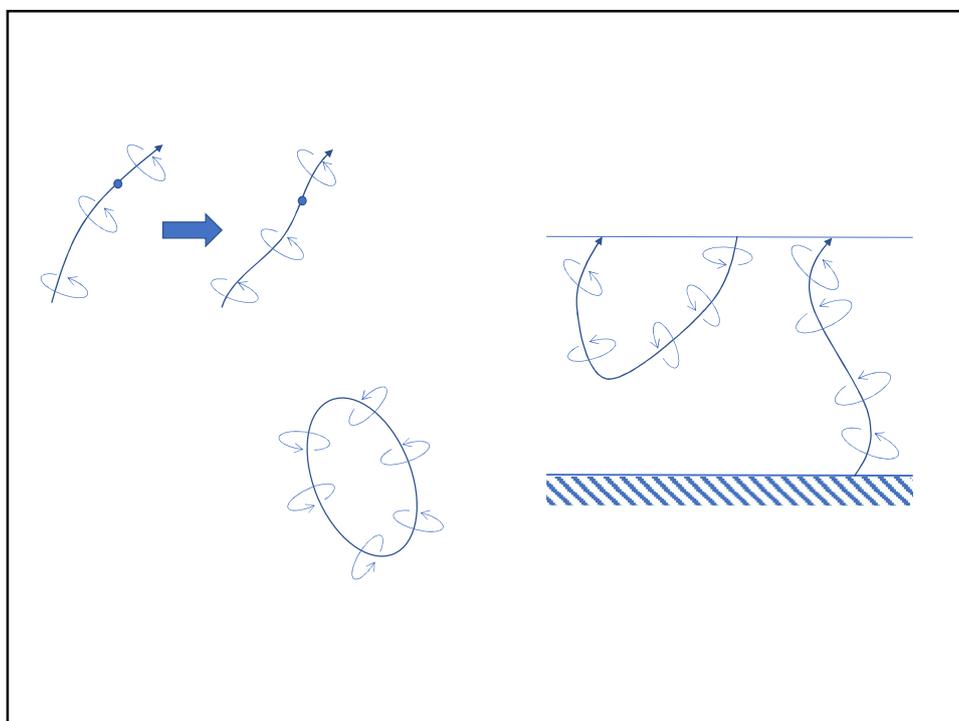
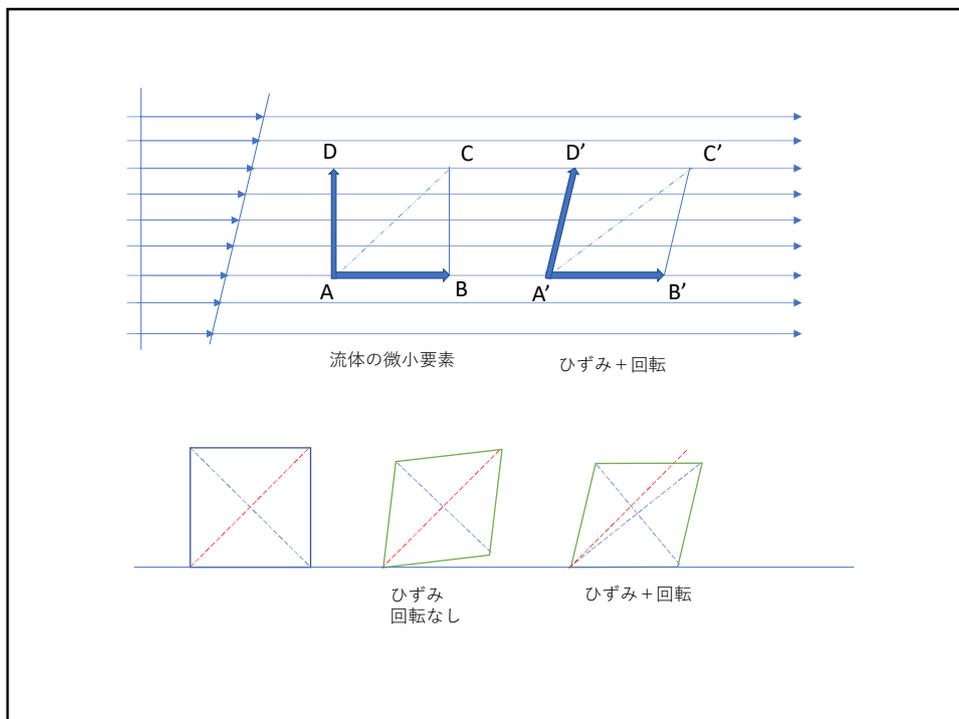


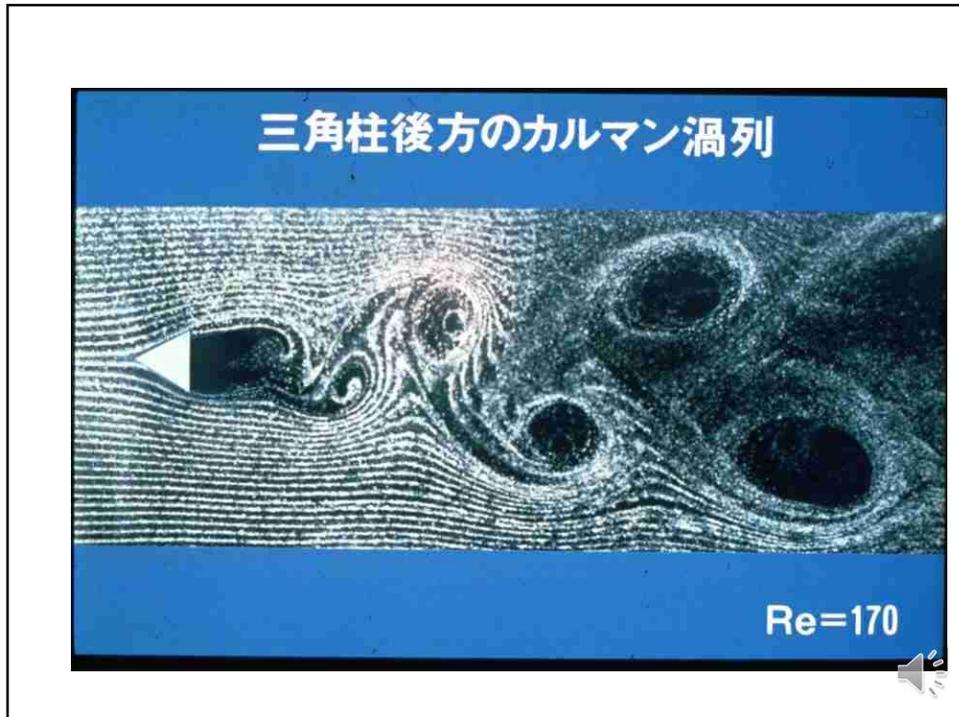
渦運動 (回転のある流れ)  
平行移動+回転  
ひずみ+回転  
平行移動+ひずみ+回転



回転量は回転中心を通る対角線を観る。

流体の微小要素 (粒子)





3.8 流線に垂直方向の運動方程式

図 3.14 のような曲がる流れにおいて、流線に垂直な方向に沿って長さ  $dn$ 、断面積  $dA$  の微小円柱体を取り、これにニュートンの運動の第 2 法則を適用すると、定常流では、

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dn} + g \frac{dz}{dn} - \frac{v^2}{r} = 0 \quad (\text{例題 3.18 参照}) \quad (3.23)$$

が得られる。ここで、 $p$  は圧力、 $dz$  は  $dn$  に対応する鉛直方向の変位、 $v^2/r$  は微小流体の求心加速度である。式 (3.23) は、流線に垂直な方向のオイラーの運動方程式である。

水平面内における回転流の場合は、 $dz/dn=0$  となるから、式 (3.23) は、

$$\frac{dp}{dn} = \rho \frac{v^2}{r} \quad (3.24)$$

で表され、求心力が曲率中心方向のこう配とつりあうことを示す。

$$\alpha_n = \frac{v^2}{r} + \frac{\partial v_n}{\partial t} = \frac{v^2}{r}$$

曲率半径  $r$  に対する角加速度  $\omega$

$$v = r\omega$$

$$\alpha_n = r\omega^2$$

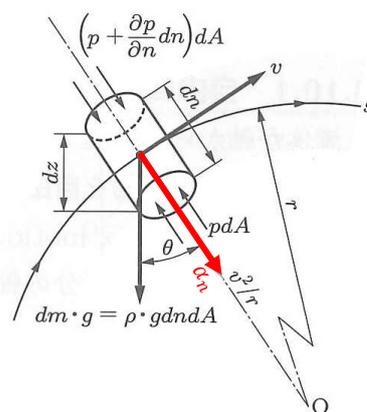
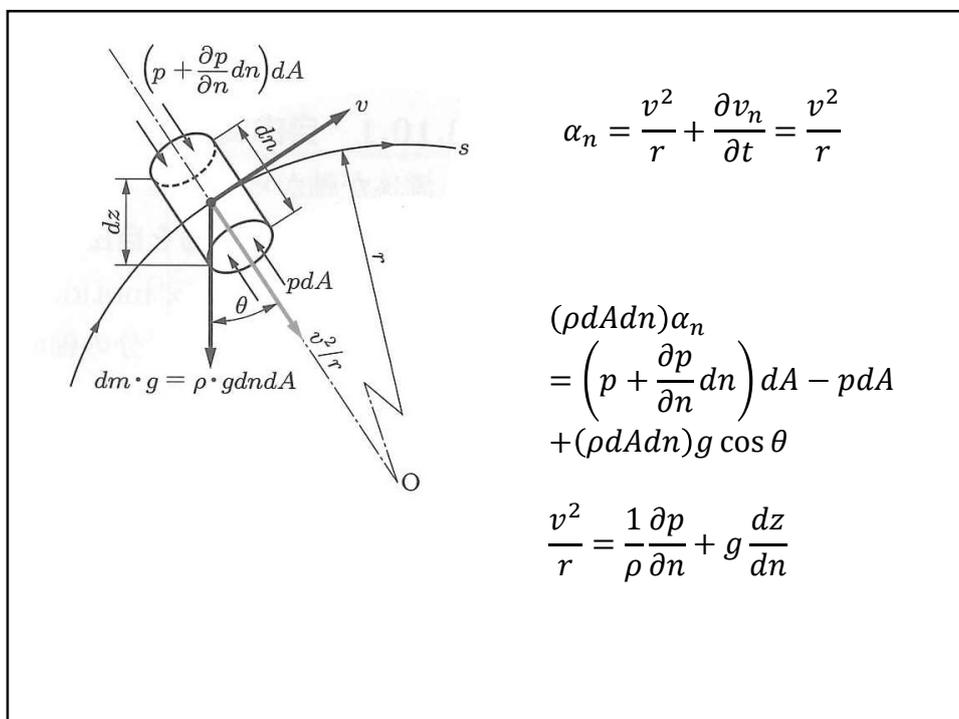
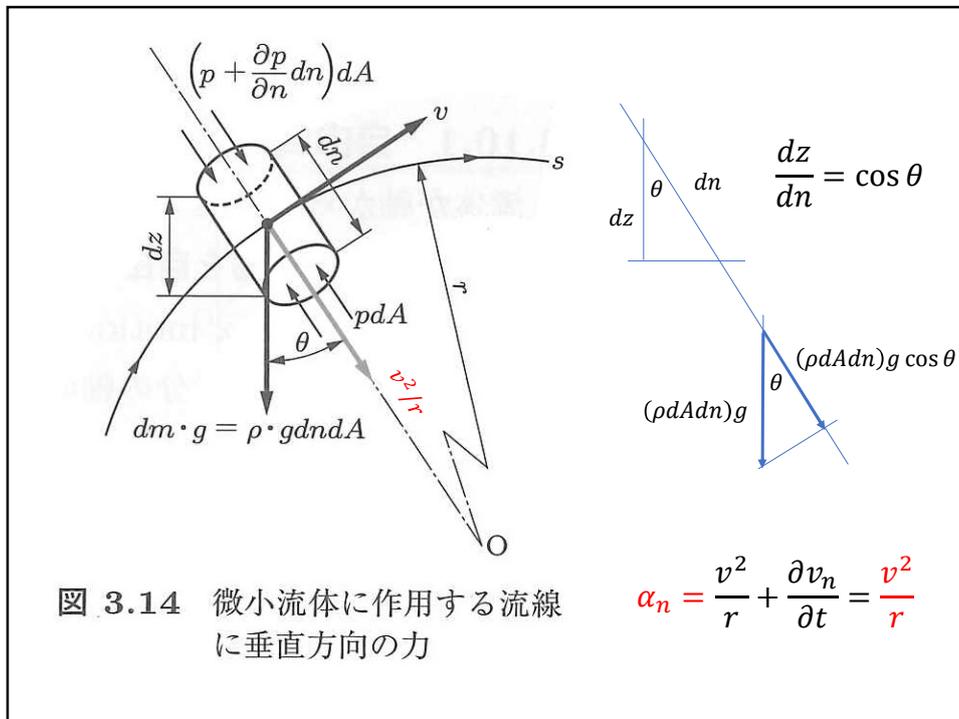


図 3.14 微小流体に作用する流線に垂直方向の力



旋回流れ

$\theta$  方向

流線のベルヌーイの式 (ヘッド  $m$ )

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v_{\theta}^2}{2g} + z = \text{Cons.} (= H(r))$$

流線のヘッドは半径( $r$ )毎に異なる

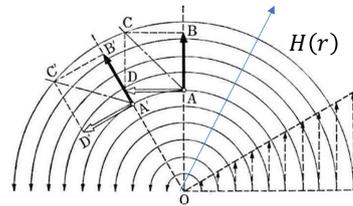
$$H(r) = \frac{p}{\rho g} + \frac{v_{\theta}^2}{2g} + z$$

$$\frac{dH}{dr} = \frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dr} + \frac{v_{\theta}}{g} \frac{dv_{\theta}}{dr} + \frac{dz}{dr}$$

【法線 ( $n$ ) 方向の運動方程式】 (3.23)

$$\frac{v_{\theta}^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g \frac{dz}{dr}$$

$$\frac{v_{\theta}^2}{r} - g \frac{dz}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$



$$\frac{dz}{dr} = \frac{1}{g} \frac{v_{\theta}^2}{r} - \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dr} &= \frac{1}{g} \frac{v_{\theta}^2}{r} + \frac{v_{\theta}}{g} \frac{dv_{\theta}}{dr} \\ &= \frac{v_{\theta}}{g} \left( \frac{v_{\theta}}{r} + \frac{dv_{\theta}}{dr} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{dH}{dr} = \frac{v_{\theta}}{g} \left( \frac{v_{\theta}}{r} + \frac{dv_{\theta}}{dr} \right) \quad (\text{A})$$

**強制渦運動** 【外部とのエネルギーの授受がある流れ】

$H$  は  $r$  方向に分布があり、流れの旋回速度  $v_{\theta}$  は、その角速度を  $\omega$  (一定) とすると、

$$v_{\theta} = r\omega$$

である。したがって、(A)は

$$\frac{dH}{dr} = \frac{v_{\theta}}{g} \left( \frac{v_{\theta}}{r} + \frac{dv_{\theta}}{dr} \right) = \frac{r\omega}{g} \left( \frac{r\omega}{r} + \frac{dr\omega}{dr} \right) = 2 \frac{r\omega^2}{g}$$

となり、これを積分し、 $r=0$  で  $H=z$  とすれば、

$$H = \frac{(r\omega)^2}{g} + z$$

流体の全ヘッド  $H$  は圧力ヘッド  $\frac{p}{\rho g}$ 、速度ヘッド  $\frac{v_{\theta}^2}{2g}$ 、位置ヘッド  $z$  の和であり、

$$H = \frac{p}{\rho g} + \frac{v_{\theta}^2}{2g} + z \quad (\text{半径方向に } H \text{ は変化する。})$$

したがって、圧力ヘッド、速度ヘッドは次式となる。

$$\frac{p}{\rho g} = \frac{(r\omega)^2}{2g}, \quad \frac{v_{\theta}^2}{2g} = \frac{(r\omega)^2}{2g}$$

$$\frac{dH}{dr} = \frac{v_\theta}{g} \left( \frac{v_\theta}{r} + \frac{dv_\theta}{dr} \right) \quad (A)$$

**自由渦運動** 【外部とのエネルギーの授受がない流れ】

$H = \text{一定}$  なので、

$$\frac{dH}{dr} = 0$$

したがって、(A)は

$$\frac{v_\theta}{r} + \frac{dv_\theta}{dr} = 0$$

上式は変数分離型の微分方程式なので全微分を書き直すと、

$$\frac{dv_\theta}{v_\theta} + \frac{dr}{r} = 0$$

これを解けば

$$\ln(rv_\theta) = C$$

すなわち、

$$rv_\theta = k, \quad v_\theta = \frac{k}{r}$$

$k$ :定数

となる。

### 3.10 ◆ 渦運動

同心円状循環流れにおいて、流体粒子が自分の軸のまわりには自転しないで円形流線に沿って回転する流れを渦なし流れ (irrotational flow) といい、 $\zeta = 0$  である、これに対して、自分の軸のまわりに自転しながら円形流線に沿って回転する流れを渦流れ (rotational flow) といい、 $\zeta \neq 0$  である。

#### 3.10.2 強制渦運動

流体が軸からの距離  $r$  に比例する円周速度  $v = r\omega$  ( $\omega$  = 一定角速度) で、軸のまわりを回転してつくる渦運動を強制渦運動 (forced vortex motion) といい、流体粒子は図 3.17 のように変形はしないが、自分の軸のまわりに自転する渦流れとなる。各流線が水平面内にある場合の流体の圧力および循環は、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\rho}{2}\omega^2 r^2 + \text{const.} \\ \Gamma &= 2\pi\omega r^2 \end{aligned} \right\} \text{(例題 3.22 参照)}$$

で与えられる。

2.7.2 項で述べた回転容器内の液体の運動は強制渦運動に属し、水車やポンプの羽根車 (impeller) 内の流れは強制渦運動に近い。

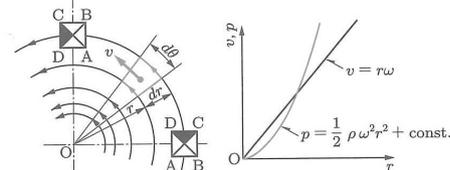
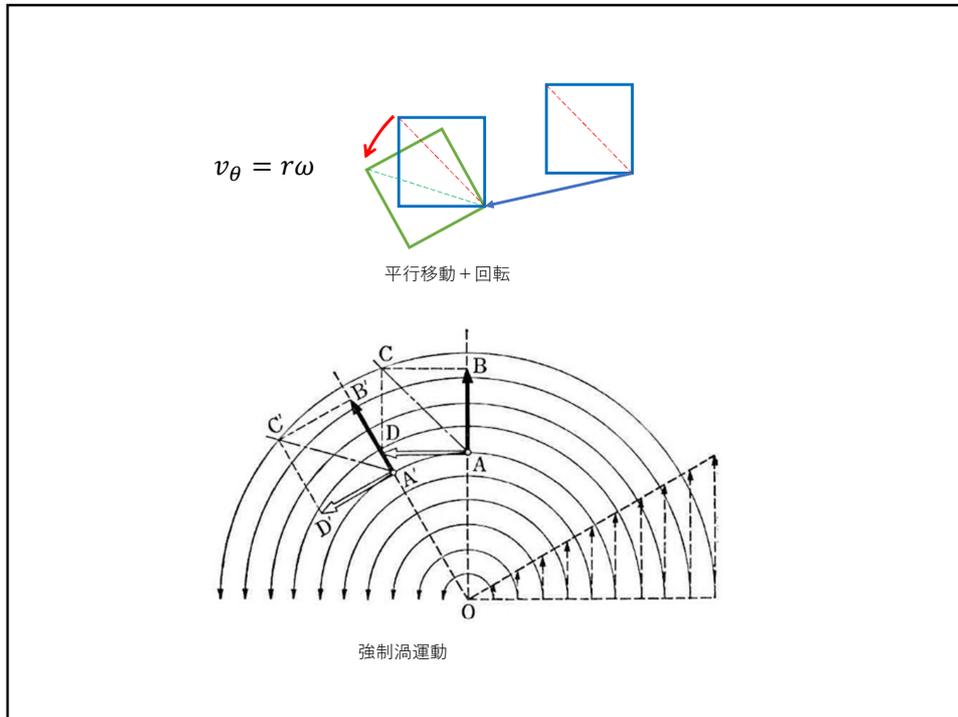


図 3.17 強制渦運動



**例題 3.22** 強制渦運動における圧力分布の式および循環を求めよ。

**解** • 圧力分布：流線に垂直な方向のオイラーの運動方程式 (3.23) において、同心円状循環流れでは、 $dn = dr$  であるから、

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + g \frac{dz}{dr} - \frac{v^2}{r} = 0 \quad (3.23 \text{ 再掲})$$

で表される。  $\rho = \text{const.}$  として上式を  $r$  について積分すると、

$$\frac{p}{\rho} + gz - \int \frac{v^2}{r} dr = \text{const.} \quad (1)$$

となる。ところで、強制渦運動の速度分布は角速度を  $\omega$  とすると、

$$v = r\omega \quad (2)$$

で表されるから、式 (1) の第 3 項は、

$$\int \frac{v^2}{r} dr = \int \omega^2 r dr = \frac{\omega^2 r^2}{2} + \text{const.} \quad (3)$$

となる。したがって、式 (1) に式 (3) を代入すると、

$$\frac{p}{\rho} - \frac{\omega^2 r^2}{2} + gz = \text{const.} \quad [\text{N} \cdot \text{m}/\text{kg} = \text{J}/\text{kg} = \text{m}^2/\text{s}^2] \quad (4)$$

となり,  $\text{const.} = C = p_0/\rho + gz_C$  の境界条件を用いると, 相対的静止の例題 2.20 における式 (1) に相当する. 各流線が水平面にある場合は,  $z = \text{const.}$  となるので, 強制渦運動の圧力分布は,

$$p = \frac{\rho}{2} \omega^2 r^2 + \text{const.} \quad (3.28 \text{ 再掲})$$

で与えられる. 図 3.17 は強制渦運動の速度分布と圧力分布を示す.

• 循環: 強制渦運動では, 図 3.17 において  $v_t = v = r\omega$ ,  $ds = r d\theta$  であるから, 循環  $\Gamma$  は式 (3.25) より,

$$\Gamma = \oint_C v_t ds = \int_0^{2\pi} \omega r^2 d\theta = 2\omega\pi r^2 \quad (3.28 \text{ 再掲})$$

で与えられる. すなわち, 強制渦運動の循環の大きさは, 積分路である円の面積に比例する.

### 3.10.1 自由渦運動

流体が軸からの距離  $r$  に反比例する円周速度  $v = C(\text{const.})/r$  で, 軸のまわりを回転してつくる渦運動を自由渦運動 (free vortex motion), または, ポテンシャル渦運動 (potential vortex motion) といい, 流体粒子は図 3.16 のように  $AC \parallel A'C'$  で変形して移動するが, 自分の軸のまわりには自転しない渦なし流れとなる. 各流線が水平面内にある場合の流体の圧力および循環は, それぞれ,

$$\left. \begin{aligned} p &= \text{const.} - \frac{\rho C^2}{2r^2} \\ \Gamma &= 2\pi C = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{例題 3.20 参照}) \quad (3.27)$$

で与えられる. ここで,  $p$  は圧力,  $\Gamma$  は循環である.

水車やポンプなどの渦形室 (spiral casing) 内の流れは, 自由渦運動に近い.

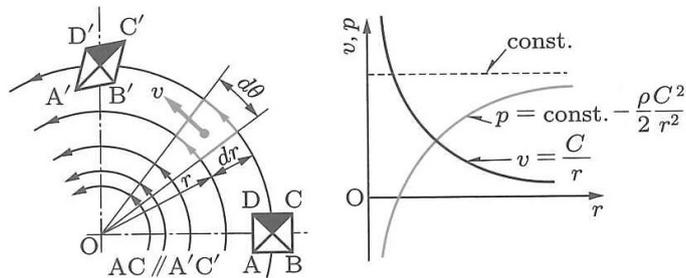


図 3.16 自由渦運動

### 3.10.3 ランキンの組合せ渦

自由渦の中心に近い部分の速度は理論的には無限大となるが、実際の流体では粘性の作用で図 3.18 のように強制渦の速度分布に移り変わる。このような渦をランキンの組合せ渦 (Rankine's compound vortex) という。大気中に起こる台風や、水車の吸出し管 (draft tube) 内の流れは、これに属する。

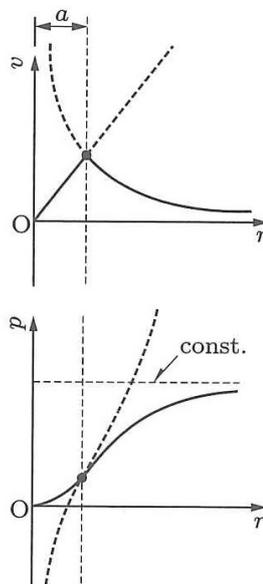
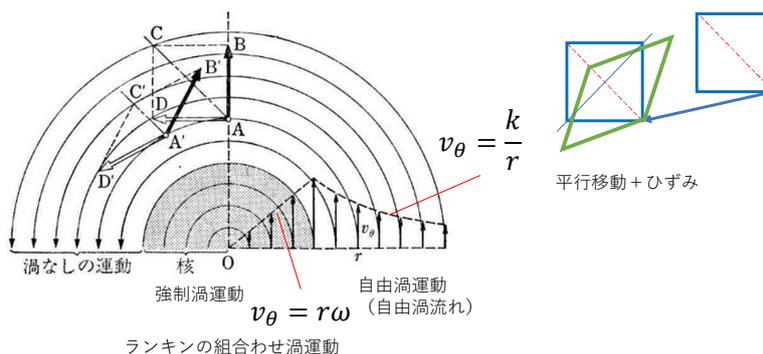


図 3.18 ランキンの組合せ渦



3.9 ◆ 循環および渦度

図 3.15 のような二次元流れにおいて、流体中に任意の閉曲線  $C$  を考え、この曲線への流れの接線方向成分  $v_t$  を  $C$  に沿って一周した線積分は循環 (circulation) といい、 $\Gamma$  で表される。すなわち、

$$\Gamma = \oint_C v_t ds = \oint_C v \cos \varphi ds \quad (3.25)$$

となる。上式で、 $ds$  は曲線上の微小長さ、 $v$  は  $ds$  における速度、 $\varphi$  は  $v$  と  $ds$  とのなす角で、 $C$  を反時計回りの方向にとり、その方向に積分する場合の  $\Gamma$  を正とする。

また、流れの中の微小閉曲線をとって、この閉曲線に沿う循環  $\Delta\Gamma$  を閉曲線で囲まれた面積  $\Delta A$  で除した値を考え、この値の  $\Delta A \rightarrow 0$  とした極限值を渦度 (vorticity)  $\zeta$  といい、二次元の循環流れでは、

$$\zeta = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \quad (3.26) \quad (\text{例題 3.19 参照})$$

で表される。上式で、 $r$  は流線の曲率半径、 $v$  は流体の速度である。

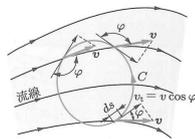


図 3.15 二次元流れにおける閉曲線のまわりの循環

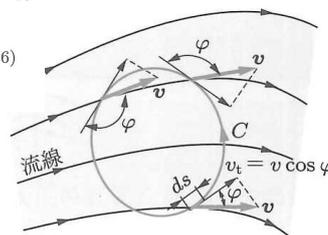


図 3.15 二次元流れにおける閉曲線のまわりの循環

**例題 3.19** 図 3.28 のような二次元循環流れにおける微小流体 ABCD の渦度  $\zeta$  は、

$$\zeta = \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r}$$

で表されることを示せ。ここで、 $r$  は流線の曲率半径、 $v$  は微小流体の速度である。

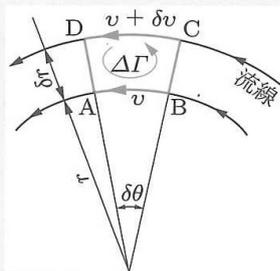


図 3.28 二次元循環流れにおける微小回路の循環

**解** 二つの流線と二つの半径で囲まれた微小流体 ABCD の循環  $\Delta\Gamma$  は、流線に垂直な方向の速度成分はゼロであるから、循環の定義より、

$$\Delta\Gamma = (v + \delta v)(r + \delta r)\delta\theta - vr\delta\theta = (r\delta v + v\delta r)\delta\theta$$

となる。したがって、微小流体の渦度  $\zeta$  は、定義より、

$$\zeta = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{(r\delta v + v\delta r)\delta\theta}{r\delta\theta\delta r} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}$$

で表される。

**例題 3.20** 自由渦運動における速度分布, 圧力分布の式および循環を求めよ.

**解** • 速度分布: 同心円状循環流れにおいて, 自由渦運動では渦なし流れで  $\zeta=0$  であり, また, 流線に沿って流線管の断面積は変わらないので, 速度は流線方向には一定で半径  $r$  方向のみによって変わる. したがって, 式 (3.26) の偏微分は微分となって,

$$\zeta = \frac{v}{r} + \frac{dv}{dr} = 0 \quad \text{あるいは} \quad \frac{dv}{v} + \frac{dr}{r} = 0$$

で表される. 上式を積分すると  $\ln vr = \text{const.}$  となる. ゆえに, 自由渦運動の速度分布は,

$$vr = C \quad (\text{const.}) \quad (1)$$

で与えられる. すなわち,  $v$  は  $r$  に反比例し,  $r=0$  で  $v=\infty$ ,  $r=\infty$  で  $v=0$  となる.

• 圧力分布: 流線に垂直な方向のオイラーの運動方程式 (3.23) において, 同心円状循環流れであるから,  $dn = dr$  で,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + g \frac{dz}{dr} - \frac{v^2}{r} = 0 \quad (3.23)'$$

で表される.  $\rho = \text{const.}$  とし上式を  $r$  について積分すると,

$$\frac{p}{\rho} + gz - \int \frac{v^2}{r} dr = \text{const.} \quad (2)$$

となる. ところで, 自由渦運動の速度分布は式 (1) で表されるから, 式 (2) の第 3 項は,

$$\int \frac{v^2}{r} dr = \int C^2 r^{-3} dr = -\frac{C^2}{2r^2} + \text{const.} = -\frac{v^2}{2} + \text{const.} \quad (3)$$

となる. したがって, 式 (2) に式 (3) を代入すると

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{const.} \quad [\text{N} \cdot \text{m}/\text{kg} = \text{J}/\text{kg} = \text{m}^2/\text{s}^2] \quad (3.15 \text{ 再掲})$$

となり, 流線と垂直な方向にもベルヌーイの式が成り立つ. 各流線が水平面内にある場合は,  $z = \text{const.}$  となり,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const.}$$

となる. ゆえに, 自由渦運動の圧力分布は,

$$p = \text{const.} - \frac{\rho C^2}{2r^2} \quad (3.27 \text{ 再掲})$$

で与えられる. すなわち,  $r=0$  で  $p=-\infty$ ,  $r=\infty$  で  $p=\text{const.}$  となる.

図 3.16 は自由渦運動の速度分布と圧力分布を示す.

• 循環: 自由渦運動では, 図 3.16 において  $v_t r = vr = C$ ,  $ds = r d\theta$  とみなせるから, 循環  $\Gamma$  は式 (3.25) より,

$$\Gamma = \oint_C v_t ds = \int_0^{2\pi} vr d\theta = 2\pi C = \text{const.} \quad (3.27 \text{ 再掲})$$

で与えられる. すなわち, 自由渦運動では積分路の円の半径に無関係に循環は一定である.

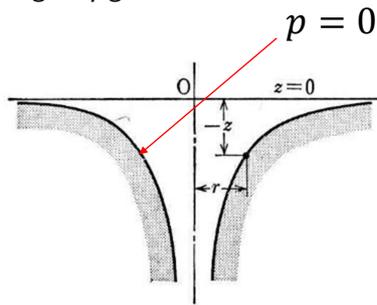
課題番号 FE1No07

問題1. 自由渦運動における自由表面の形状を求めよ。

$$r = \infty, z = 0 \quad v_\theta = \frac{k}{r}$$

自由表面  $p = 0$   $k$ :定数とする。

$$\frac{v_\theta^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = H$$



(a) 自由渦

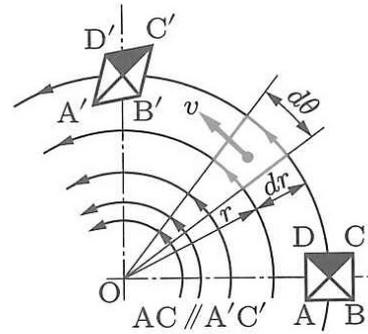


図 3.16

課題番号 FE1No07

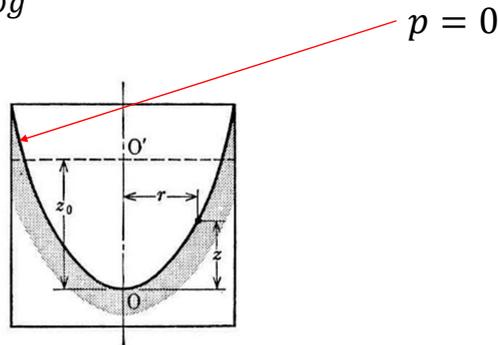
問題2. 強制渦運動における自由表面の形状を求めよ。

$$r = 0, z = 0$$

自由表面  $p = 0$

流れの旋回速度  $v_\theta$  は、その角速度を  $\omega$  (一定) とすると、  
 $v_\theta = r\omega$  である。

$$\frac{v_\theta^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = H$$



(b) 強制渦